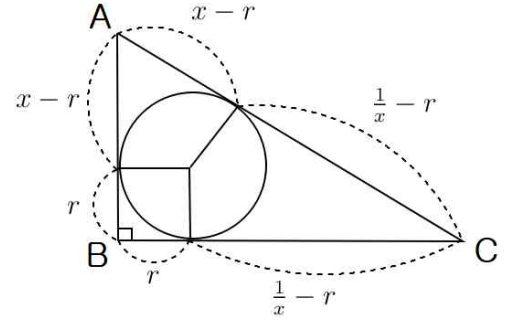


1. 내접원의 반지름을  $r$ 이라 하자.

오른쪽 그림에서  $\left(x-r+\frac{1}{x}-r\right)^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$  이고,

$r < x$ 이므로  $r$ 에 대해 정리하면  $r = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)$ 이다.

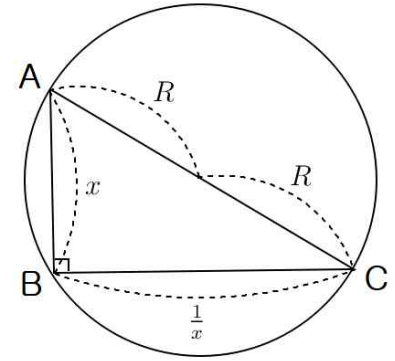
따라서  $f(x) = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)^2$ 이다.



외접원의 반지름을  $R$ 이라 하면, 오른쪽 그림과 같이 외접원의 중심은 빗변 AC의 중점이므로,

$R = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$  이다. 따라서  $g(x) = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$  이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) &= \frac{\pi^2}{16} \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{16} (x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 1})^2 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$



이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 1)}{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 1$  이므로,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \frac{\pi^2}{16} \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi^2}{16}$  이다.

2. 기울기가  $\sqrt{m}$ 이고 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 직선의 방정식은  $y = \sqrt{m}x \pm \sqrt{a^2m + b^2}$  이므로

$l_1: y = \sqrt{m}x + \sqrt{a^2m + b^2}$ ,  $l_2: y = \sqrt{m}x - \sqrt{a^2m + b^2}$  라 두자.

$l_1$ 과 수직으로 만나는 직선의 기울기는  $-\frac{1}{\sqrt{m}}$ 이므로

$l_3: y = -\frac{1}{\sqrt{m}}x + \sqrt{\frac{a^2}{m} + b^2}$ ,  $l_4: y = -\frac{1}{\sqrt{m}}x - \sqrt{\frac{a^2}{m} + b^2}$  으로 둘 수 있다.

직선  $l_1$  위의 한 점  $(0, \sqrt{a^2m + b^2})$ 에서 직선  $l_2$ 까지의 거리는  $\frac{2\sqrt{a^2m + b^2}}{\sqrt{m+1}}$ 이고,

직선  $l_3$  위의 한 점  $(0, \sqrt{\frac{a^2}{m} + b^2})$ 에서 직선  $l_4$ 까지의 거리는  $\frac{2\sqrt{\frac{a^2}{m} + b^2}}{\sqrt{\frac{1}{m} + 1}} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2m}}{\sqrt{m+1}}$ 이므로

$S(m) = \frac{4\sqrt{(a^2m + b^2)(a^2 + b^2m)}}{m+1}$  을 얻는다.

$\{S(m)\}^2$ 을  $f(m)$ 이라 두면  $f(m) = \frac{16(a^2m + b^2)(a^2 + b^2m)}{(m+1)^2}$  이고, 이를 미분하면

$$\begin{aligned}
f'(m) &= 16 \frac{(a^2(a^2+b^2m)+b^2(a^2m+b^2))(m+1)-2(a^2m+b^2)(a^2+b^2m)}{(m+1)^3} \\
&= 16 \frac{(2a^2b^2m+a^4+b^4)(m+1)-2(a^2b^2m^2+(a^4+b^4)m+a^2b^2)}{(m+1)^3} \\
&= 16 \frac{(a^2+b^2)^2m+a^4+b^4-2(a^4+b^4)m-2a^2b^2}{(m+1)^3} \\
&= 16(a^2-b^2)^2 \frac{1-m}{(m+1)^3}
\end{aligned}$$

를 얻는다. 증감표를 그려보면 아래와 같다.

$m$	0	...	1	...	2026
$f'(m)$		+	0	-	
$f(m)$		↗	$4(a^2+b^2)^2$	↘	

따라서,  $\{S(m)\}^2$ 의 최댓값은  $4(a^2+b^2)^2$ 이다.

3. 선분 AB의 중점을 M(2,-1)이라 하면

$$2|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=4|\overrightarrow{PG}|, \text{ 즉, } |\overrightarrow{PM}|=2|\overrightarrow{PG}|$$

점 P의 좌표를  $(x,y)$ 라 하면, 무게중심 G의 좌표가  $\left(\frac{6-2+5}{3}, \frac{2-4-1}{3}\right)=(3,-1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{PM}|^2=(x-2)^2+(y+1)^2, \quad |\overrightarrow{PG}|^2=(x-3)^2+(y+1)^2$$

따라서  $|\overrightarrow{PM}|^2=4|\overrightarrow{PG}|^2$  으로부터

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4(x-3)^2+4(y+1)^2$$

을 얻고, 이를 정리하면

$$3x^2-20x+3y^2+6y+35=0 \text{ 또는 } \left(x-\frac{10}{3}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

그러므로 점 P가 나타내는 도형 T는 점  $D\left(\frac{10}{3}, -1\right)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가  $\frac{2}{3}$ 인 원이다.

한편,  $\overline{AC}=\sqrt{(6-5)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$ 이고, 직선 AC의 방정식은  $y=3x-16$ 이다.

삼각형 APC의 넓이는  $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times(\text{점 P와 직선 AC사이의 거리})$ 이고,

$$\begin{aligned}
&(\text{점 P와 직선 AC사이의 거리의 최댓값})=(\text{점 D와 직선 AC사이의 거리})+(\text{원 T의 반지름}) \\
&=\frac{5}{\sqrt{10}}+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

따라서 삼각형 APC의 넓이의 최댓값은  $\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{10}}{3}$ 이다.

1.  $a=1$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{5n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2 = 0$  이다.

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{5n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a^{2n} (1 + a^{3n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\log a^{2n} + \log(1 + a^{3n})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \log a + \frac{\log(1 + a^{3n})}{n} \right] = 2 \log a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 < a < \infty \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{5n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a^{5n} (a^{-3n} + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\log a^{5n} + \log(a^{-3n} + 1)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5 \log a + \frac{\log(a^{-3n} + 1)}{n} \right] = 5 \log a \end{aligned}$$

$$\text{답: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{5n}) = \begin{cases} 2 \log a & (0 < a < 1) \\ 0 & (a = 1) \\ 5 \log a & (a > 1) \end{cases}$$

2. 문제에서 주어진 부등식에 자연로그를 취하면,  $n^k \leq k^n \Leftrightarrow k \ln n \leq n \ln k \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln k}{k}$  이다.

양의 실수에서 정의된 함수  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에 대하여  $a_n$ 은  $f(k) \geq f(n)$ 을 만족하는 자연수  $k$ 의 개수이다.

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  이고  $x > e$ 인  $x$ 에 대하여  $f'(x) < 0$ 이므로, 구간  $(e, \infty)$ 에서  $f(x)$ 는 감소한다.

$n \geq 3$ 인 자연수  $n$ 에 대하여 자연수  $k$ 가  $k \leq n$ 이면  $f(k) \geq f(n)$ 이고,  $k > n$ 이면  $f(k) < f(n)$ 이다.

따라서  $a_n = n - 2$ 이므로,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$ 이다.

3. 두 교점 중  $y$ 좌표가 양수인 점을  $P_1(x_1, y_1)$ 이라 하면,  $P_2$ 의 좌표는  $(x_1, -y_1)$ 이다.

점  $P_1$ 에서의 포물선의 접선의 방정식은  $y_1 y = 2p(x + x_1)$ , 점  $P_2$ 에서의 포물선의 접선의 방정식은  $-y_1 y = 2p(x + x_1)$ 이다. 따라서 점  $A$ 의 좌표는  $(-x_1, 0)$ 이고  $\overrightarrow{AP_1} = (2x_1, y_1)$ ,  $\overrightarrow{AP_2} = (2x_1, -y_1)$ 이다.

$\angle P_1 A P_2$ 를  $\theta$ 라 하면,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2}}{|\overrightarrow{AP_1}| |\overrightarrow{AP_2}|} = \frac{4x_1^2 - y_1^2}{4x_1^2 + y_1^2} = \frac{4x_1^2 - 4px_1}{4x_1^2 + 4px_1} = \frac{x_1 - p}{x_1 + p}$$

이때  $\theta = 60^\circ$ 이므로  $x_1 = 3p$ 이다.

한편,  $x_1$ 과  $y_1$ 은  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 과  $y_1^2 = 4px_1$ 을 만족하므로, 이차방정식  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{4px_1}{b^2} = 1$ ,  $x_1 > 0$ 이 성립한다.

이차방정식을  $x_1$ 에 대하여 풀면  $x_1 = -\frac{2a^2 p}{b^2} + \sqrt{\frac{4a^4 p^2}{b^4} + a^2}$

$$b^4 = (a^2 - p^2)^2 \text{ 이므로, } x_1 = -\frac{2a^2 p}{b^2} + \frac{a(a^2 + p^2)}{b^2} = \frac{a(a-p)^2}{b^2} = \frac{a(a-p)}{a+p}$$

그러므로  $3p = \frac{a(a-p)}{(a+p)}$  이고,  $\frac{a}{p} = t$ 라 하면,  $t^2 - 4t - 3 = 0$ 이다.  $t > 0$ 이므로  $t = 2 + \sqrt{7}$ 이다.